2.4.5 Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru II

Předpoklady: 2404

Opakování: Pokud se v částech definičního oboru funkce chová různým způsobem rozdělíme si definiční obor na části a v každé z nich řešíme graf samostatně.
Pro absolutní hodnoty:
a) zjistíme, kdy se mění znaménko uvnitř, a tím rozdělíme definiční obor na intervaly,
b) v každém intervalu odstraníme všechny absolutní hodnoty a vypočteme výslednou funkci,
c) pro každou funkci nakreslíme graf,
d) každý z grafů vytáhneme v intervalu, pro který platí.

Pedagogická poznámka: Stejně jako v předchozí hodině se dá očekávat obrovský rozptyl v rychlosti postupu. Hlavně u příkladu 2 je však třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli příklad špatně (kvůli odstraňování $|1-x|$).

Pedagogická poznámka: Mezi jednotlivými učiteli panují rozdíly v tom, zda a jak zahrnovat hraniční body do intervalů, ve kterých příklad řešíme. Pokud jde o postup, je to úplně jedno, ten je stejný. Určité nejasnosti by mohly nastat u výsledků v případě, že by řešením byl jeden z krajních bodů. V takovém případě je třeba, aby byl krajní bod zahrnut alespoň do jednoho z intervalů (je jedno kterého), což je řešení používané většino učitelů. Já osobně normálně zahrnuji krajní body do všech intervalů s tím, že se pokud krajní bod řešením je, musí vyplynout z každého intervalu a pokud vyplyne pouze z jednoho, jde o jasný znak chyby ve výpočtu.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y=|x+1|+|x|+1$.

Problém: Funkce obsahuje dvě absolutní hodnoty $\Rightarrow$ z každé můžeme určit jeden nulový bod $\Rightarrow$ definiční obor musíme rozdělit na tři části.

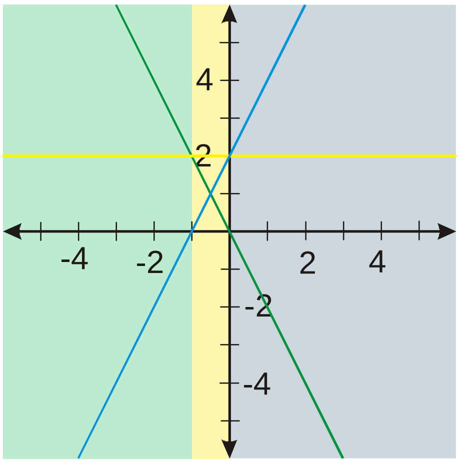
Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:
$|x+1|$: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$
$|x|$: $x=0$

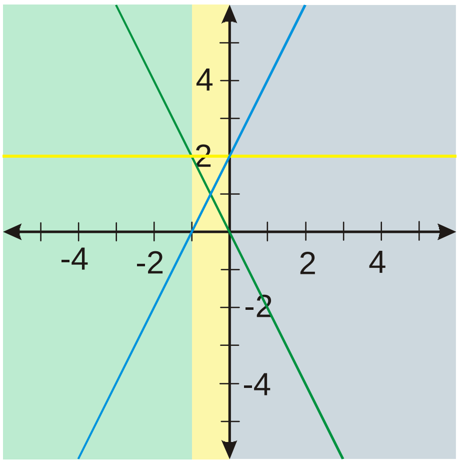
$\Rightarrow$ tři intervaly

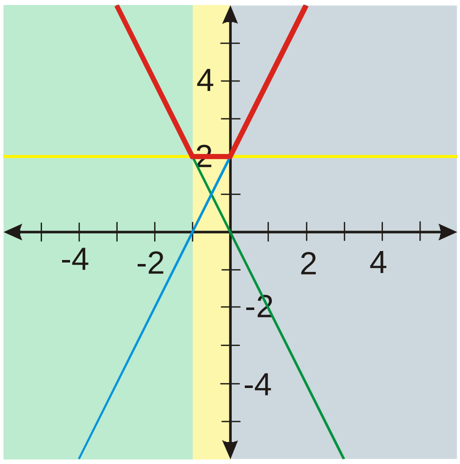
1) $x\in(-\infty;-1\rangle$ $\quad x+1\le 0 \Rightarrow |x+1|=-x-1 \quad x<0 \Rightarrow |x|=-x$
$y=|x+1|+|x|+1=-x-1-x+1=-2x$

2) $x\in\langle -1;0\rangle$ $\quad x+1>0 \Rightarrow |x+1|=x+1 \quad x<0 \Rightarrow |x|=-x$
$y=|x+1|+|x|+1=x+1-x+1=2$

3) $x\in\langle 0;\infty)$ $\quad x+1>0 \Rightarrow |x+1|=x+1 \quad x\ge 0 \Rightarrow |x|=x$
$y=|x+1|+|x|+1=x+1+x+1=2x+2$







Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se pozná, kteří studenti mají opravdu jasno v důvodech, které vedou k zapisování intervalů, pro které platí vypočítané funkce. Pro ty, kteří dosud postupovali automaticky, bude potřeba příklad částečně vyřešit na tabuli. Já počítám předpis funkce v prvním intervalu, zbývající dva nechávám na studentech a kontrolujeme jej až později.

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = |1-x| + |2+x| - x$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|1-x|$: $1-x=0 \Rightarrow x=1$

$|2+x|$: $2+x=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$ tři intervaly

1) $x \in (-\infty;-2\rangle$ $\quad 1-x \geq 0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$ $\quad 2+x \leq 0 \Rightarrow |2+x| = -2-x$

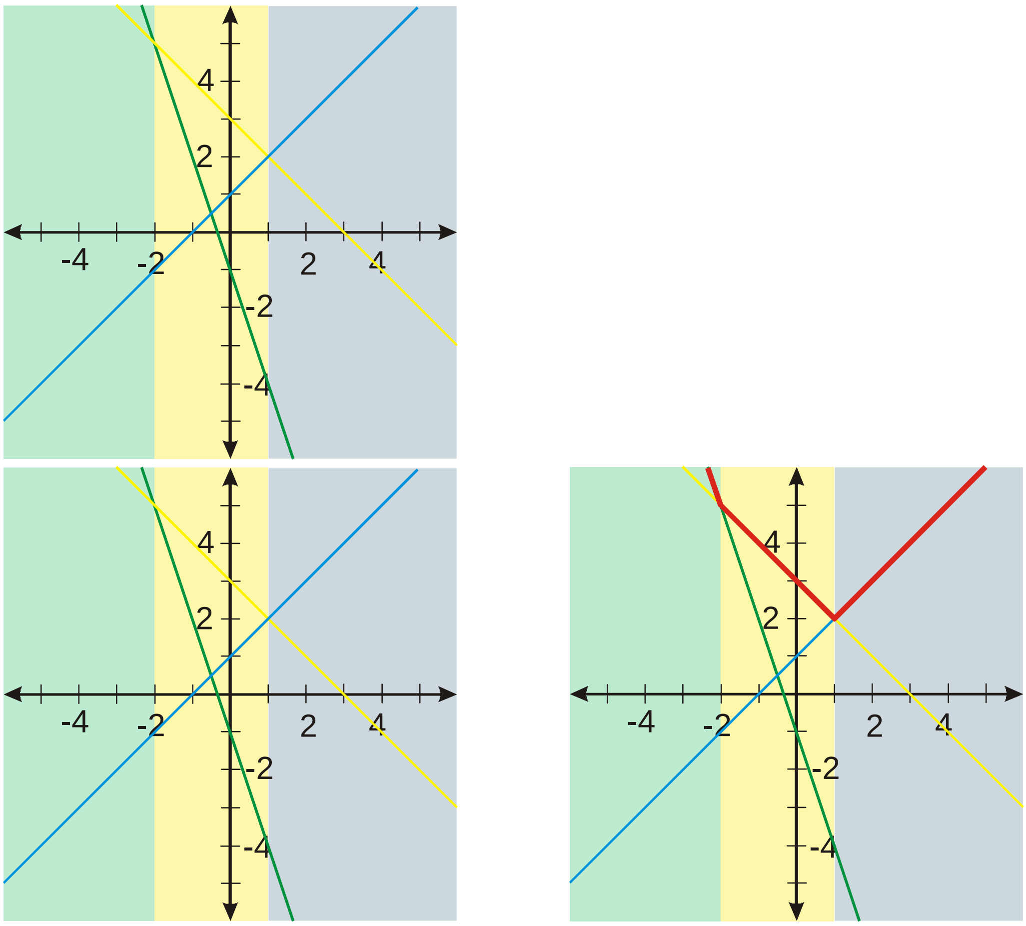
$y = |1-x| + |2+x| - x = 1-x-2-x-x = -1-3x$

2) $x \in \langle -2;1\rangle$ $\quad 1-x \geq 0 \Rightarrow |1-x| = 1-x$ $\quad 2+x \geq 0 \Rightarrow |2+x| = 2+x$

$y = |1-x| + |2+x| - x = 1-x+2+x-x = 3-x$

3) $x \in \langle 1;\infty)$ $\quad 1-x \leq 0 \Rightarrow |1-x| = -1+x$ $\quad 2+x \geq 0 \Rightarrow |2+x| = 2+x$

$y = |1-x| + |2+x| - x = -1+x+2+x-x = 1+x$



Pedagogická poznámka: Studenti mají problémy s odstraňováním absolutní hodnoty $|1-x|$, je třeba dát pozor, aby rychlejší studenti neměli tuto chybu v sešitu příliš dlouho.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y=|2x-1|-|1-x|+x-1$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|2x-1|$: $\quad 2x-1=0 \Rightarrow x=0{,}5$

$|1-x|$: $\quad 1-x=0 \Rightarrow x=1$

0,5 1 $\quad \Rightarrow$ tři intervaly

1) $x\in(-\infty;0{,}5)$ $\quad 2x-1\le 0 \Rightarrow |2x-1|=-2x+1$ $\quad 1-x\ge 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$

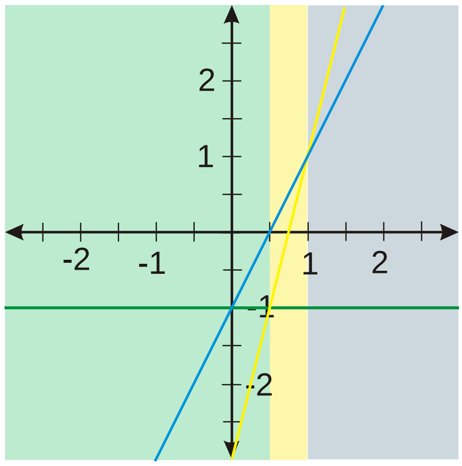
$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=-2x+1-(1-x)+x-1=-1$

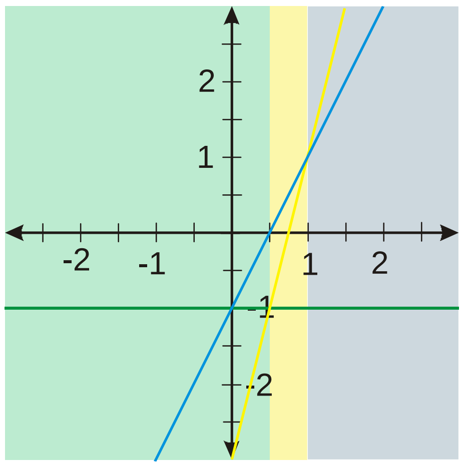
2) $x\in\langle 0{,}5;1)$ $\quad 2x-1\ge 0 \Rightarrow |2x-1|=2x-1$ $\quad 1-x\ge 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$

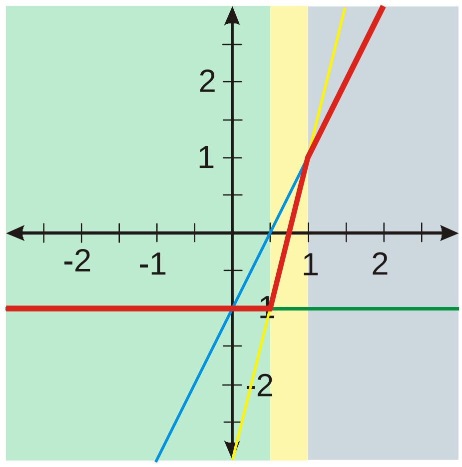
$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=2x-1-(1-x)+x-1=4x-3$

3) $x\in\langle 1;\infty)$ $\quad 2x-1\ge 0 \Rightarrow |2x-1|=2x-1$ $\quad 1-x\le 0 \Rightarrow |1-x|=-1+x$

$y=|2x-1|-|1-x|+x-1=2x-1-(-1+x)+x-1=2x-1$







Př. 4: Nakresli graf funkce $y=|2x|-x-|1-x|+|x+2|-2$.

Zjistíme nulové body jednotlivých absolutních hodnot:

$|2x|$: $2x=0 \Rightarrow x=0$

$|1-x|$: $1-x=0 \Rightarrow x=1$

$|x+2|$: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$ čtyři intervaly

1) $x \in (-\infty;-2\rangle$ $2x \le 0 \Rightarrow |2x|=-2x$ $1-x \ge 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$ $x+2 \le 0 \Rightarrow |x+2|=-x-2$

$y=|2x|-x-|1-x|+|x+2|-2=-2x-x-1+x-x-2-2=-3x-5$

2) $x \in \langle -2;0\rangle$ $2x \le 0 \Rightarrow |2x|=-2x$ $1-x \ge 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$ $x+2 \ge 0 \Rightarrow |x+2|=x+2$

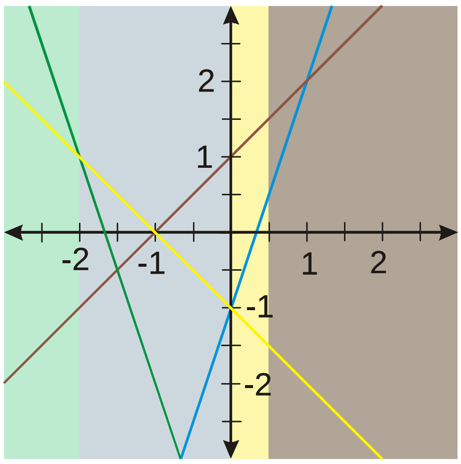
$y=|2x|-x-|1-x|+|x+2|-2=-2x-x-1+x+x+2-2=-x-1$

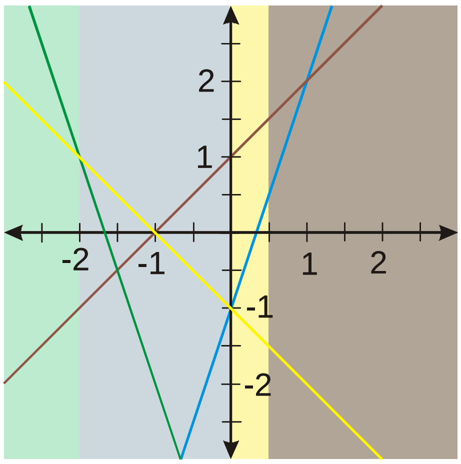
3) $x \in \langle 0;1\rangle$ $2x \le 0 \Rightarrow |2x|=2x$ $1-x \ge 0 \Rightarrow |1-x|=1-x$ $x+2 \le 0 \Rightarrow |x+2|=-x-2$

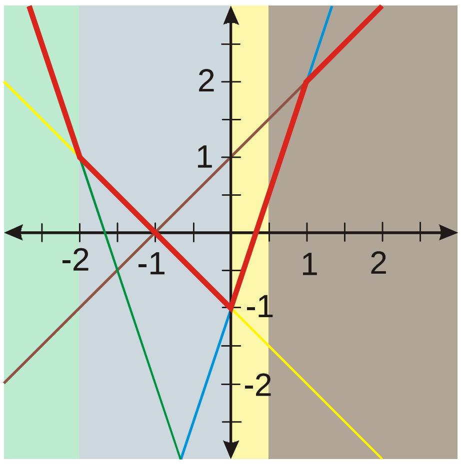
$y=|2x|-x-|1-x|+|x+2|-2=2x-x-1+x+x+2-2=3x-1$

4) $x \in \langle 1;\infty)$ $2x \le 0 \Rightarrow |2x|=2x$ $1-x \le 0 \Rightarrow |1-x|=-1+x$ $x+2 \le 0 \Rightarrow |x+2|=-x-2$

$y=|2x|-x-|1-x|+|x+2|-2=2x-x+1-x+x+2-2=x+1$







Přestává to být zvládnutelné. Zkusíme najít jinou metodu.

Př. 5: Na základě výsledků příkladů v této a předchozí rovině navrhni:
a) volbu bodů, ve kterých je nutné počítat funkční hodnoty při kreslení grafů částečných lineárních funkcí vzniklých v jednotlivých intervalech
b) nejrychlejší způsob řešení obtížnějších příkladů

Všechny zkonstruované grafy byly lomené nepřerušované čáry $\Rightarrow$
a) Pro kreslení jednotlivých lineárních funkcí je nejlepší volit hodnoty v nulových bodech, protože získané body náleží vždy dvěma částečným funkcím v intervalech, které v daném nulovém bodu sousedí.
b) Pro zakreslení jednotlivých částečných lineárních funkcí nám stačí hodnoty v nulových bodech, které ohraničují interval, pro který lineární funkci kreslíme $\Rightarrow$ nejrychleji můžeme postupovat takto:

- najdeme nulové body
- určíme hodnoty funkce v nulových bodech (a tedy i všechny částečné lineární funkce v omezených intervalech)
- určíme předpisy částečných lineárních funkcí v neomezených intervalech (nebo další dvě funkční hodnoty)
- dokreslíme graf funkce

Př. 6: Pomocí úspornější metody z předchozího úkolu nakresli graf funkce $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4$.

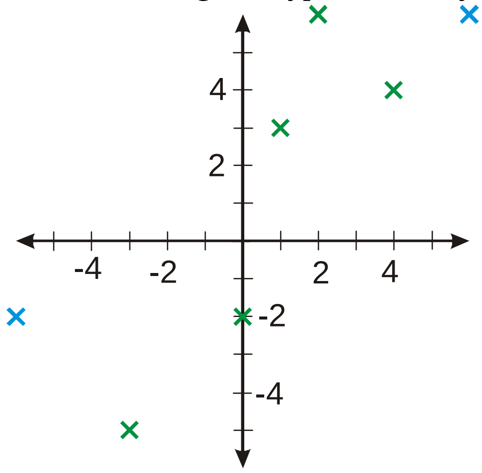
Procházíme jednotlivé nulové body a počítáme funkční hodnoty:

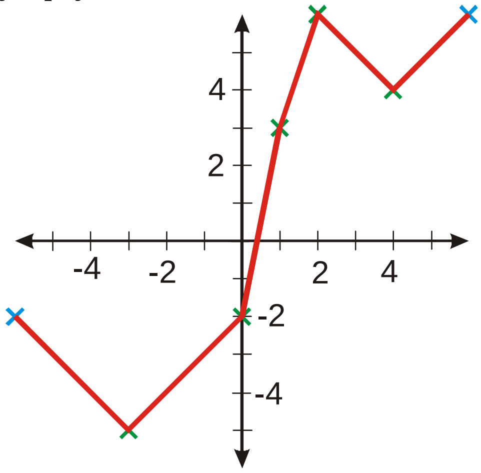
- $|x-4| \Rightarrow x=4$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|4-4|-|2\cdot 4-4|+|4+3|-|1-4|+2|4|-4=4$
  $\Rightarrow$ bod $[4;4]$
- $|2x-4| \Rightarrow x=2$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|2-4|-|2\cdot 2-4|+|2+3|-|1-2|+2|2|-4=6$
  $\Rightarrow$ bod $[2;6]$
- $|x+3| \Rightarrow x=-3$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|(-3)-4|-|2\cdot(-3)-4|+|(-3)+3|-|1-(-3)|+2|(-3)|-4=-5$
  $\Rightarrow$ bod $[-3;-5]$
- $|1-x| \Rightarrow x=1$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|1-4|-|2\cdot 1-4|+|1+3|-|1-1|+2|1|-4=3$
  $\Rightarrow$ bod $[1;3]$
- $|x| \Rightarrow x=0$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|0-4|-|0\cdot 1-4|+|0+3|-|1-0|+2|0|-4=-2$
  $\Rightarrow$ bod $[0;-2]$

Dopočteme hodnotu pro x menší než nejmenší nulový bod a pro x větší než největší nulový bod:

- $x=6$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|6-4|-|2\cdot 6-4|+|6+3|-|1-6|+2|6|-4=6$
  $\Rightarrow$ bod $[6;6]$
- $x=-6$
  $y=|x-4|-|2x-4|+|x+3|-|1-x|+2|x|-4=$
  $=|(-6)-4|-|2\cdot(-6)-4|+|(-6)+3|-|1-(-6)|+2|(-6)|-4=-2$
  $\Rightarrow$ bod $[-6;-2]$

Zakreslíme do grafu vypočtené body a poté je spojíme lomenou čarou:





Dodatek: Na první pohled se zdá, že jsme od začátku měli používat metodu z předchozího příkladu. Tato metoda má však dvě zásadní nevýhody:
Není z ní příliš dobře vidět, na čem metoda stojí.
Není možné ji použít pro jiné druhy funkcí s absolutními hodnotami (tyto funkce nás čekají v dalších kapitolách).

Př. 7: (BONUS) Nakresli graf funkce $y = \left||x+1|-1\right| + x + 1$.

Zjištění nulových bodů bude problém, pro vnější absolutní hodnotu nevíme, jaká čísla dodá vnitřní absolutní hodnota $\Rightarrow$ nejdříve odstraním vnitřní absolutní hodnotu:
$|x+1|$: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

-1 $\Rightarrow$ dva intervaly

1) $x \in (-\infty;-1)$
$x+1 \le 0 \Rightarrow |x+1| = -x-1$
$y = \left||x+1|-1\right| + x+1 = |-x-1-1| + x+1 = |-x-2| + x+1$
teď odstraníme vnější absolutní hodnotu
$|-x-2|$: $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

1)a) $x \in (-\infty;-2\rangle$
$-x-2 \ge 0 \Rightarrow |-x-2| = -x-2$
$y = |-x-2| + x+1 = -x-2+x+1 = -1$

1)b) $x \in \langle -2;-1)$
$-x-2 \le 0 \Rightarrow |-x-2| = -(-x-2) = x+2$
$y = |-x-2| + x+1 = x+2+x+1 = 2x+3$

2) vracíme se k vnitřní absolutní hodnotě
$x \in \langle -1;\infty)$
$x+1 \ge 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$
$y = \left||x+1|-1\right| + x+1 = |x+1-1| + x+1 = |x| + x+1$

teď odstraníme vnější absolutní hodnotu

$|x|$: $x = 0$

2)a) $x \in \langle -1; 0 \rangle$

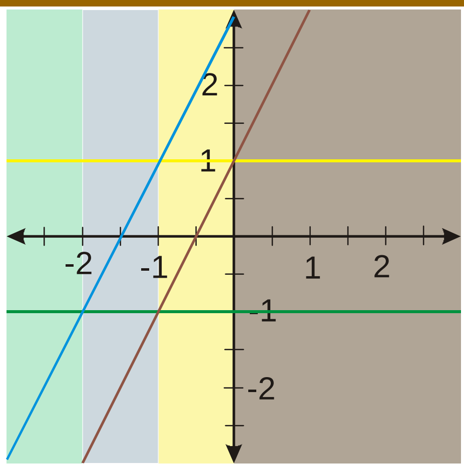
$x \le 0 \Rightarrow |x| = -x$

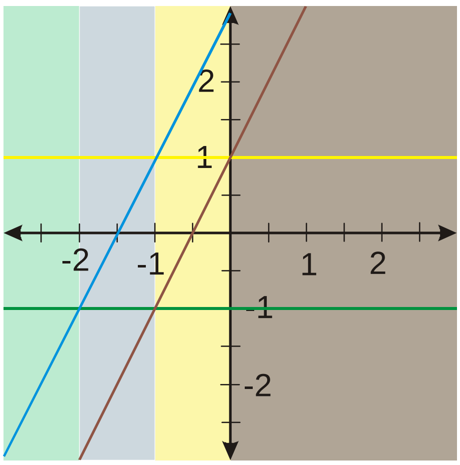
$y = |x| + x + 1 = -x + x + 1 = 1$

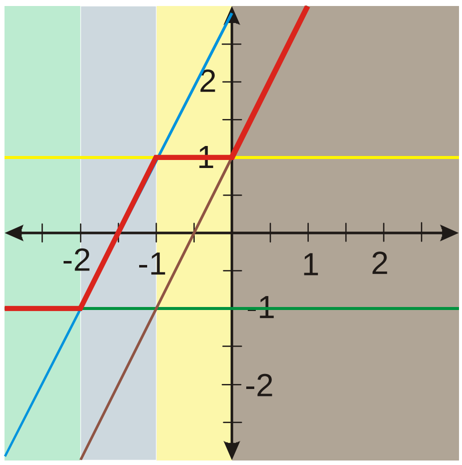
2)b) $x \in \langle 0; \infty)$

$x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$

$y = |x| + x + 1 = x + x + 1 = 2x + 1$







Pedagogická poznámka: Nikdo nepředpokládá, že předcházející příklad udělají všichni. Pokud se to povede alespoň někomu, bude to úspěch.

Př. 8: Petáková:
strana 28/cvičení 40 m_1, m_2

Shrnutí: Postupným odstraňováním absolutních hodnot můžeme nakreslit i grafy funkcí s vloženými absolutními hodnotami (jen se to nesmí uspěchat).